# FICHE DE RESUME SUR LES TESTS D'HYPOTHESES

**Les risques d'erreur**

| | | Réalité | |
|---|---|---|---|
| | | Ho vraie | Ho faux |
| Décision | Ho vraie | bonne décision | Erreur de deuxième espèce $\beta$ = P[accepter Ho quand Ho faux] |
| | Ho faux | Erreur de première espèce $\alpha$ = P[rejeter Ho quand Ho vraie] | bonne décision |

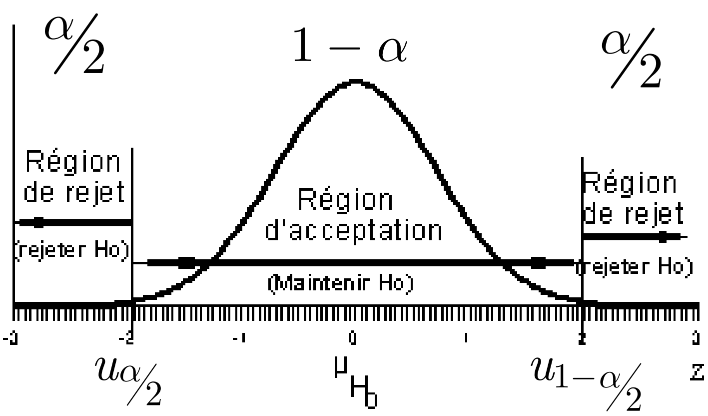
**Démarche des tests d'hypothèses**

1. Définir les hypothèses
2. Fixer un seuil de signification (ou niveau du test)
3. Définir la statistique du test Z
4. Définir une règle de décision en donnant par exemple la zone de rejet de l'hypothèse nulle
5. Calcul numérique à partir de l'échantillon de la statistique de test $z_{obs}$ ou de la p-valeur selon la méthode choisie
6. Décision

**Zone de rejet pour un test bilatéral** : $\left\{ Z > u_{1-\alpha/2} \ ou \ Z < u_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$

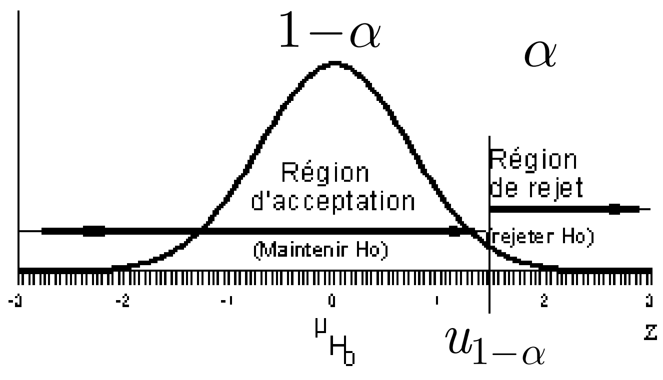
On note $u_\alpha$ le fractile d'ordre $\alpha$ de la loi de la statistique d'ordre

**ATTENTION** : la loi n'est pas toujours symétrique et parfois $u_{\alpha/2} \neq u_{1-\alpha/2}$




*source : université du Quebec*

**Zone de rejet pour un test unilatéral à droite :** $\{Z > u_{1-\alpha}\}$




*source : université du Quebec*

**Zone de rejet pour un test unilatéral à droite :** $\{Z < u_{\alpha}\}$

**p-valeur**

Si la p-valeur est inférieure au seuil de signification, alors on rejette l'hypothèse nulle.

1. pour un test bilatéral :

$$pvaleur = \begin{cases} 2P(Z \leq z_{obs}) \;\; si \;\; P(Z \leq z_{obs}) \leq 0.5 \\ 2P(Z \geq z_{obs}) \;\; si \;\; P(Z \leq z_{obs}) \geq 0.5 \end{cases}$$

2. pour un test unilatéral à droite

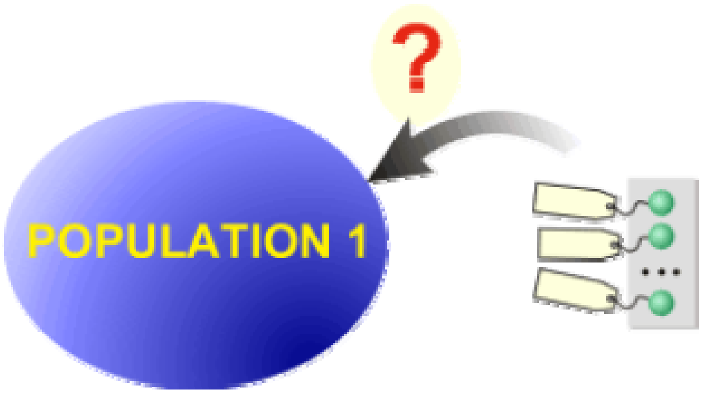
$$pvaleur = P_{H_0}(Z > z_{obs})$$

3. pour un test unilatéral à gauche

$$pvaleur = P_{H_0}(Z < z_{obs})$$

## TESTS DE CONFORMITE

Les tests de conformité sont destinés à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée ou représentatif de cette population, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne, la variance ou la fréquence observée.




*Source : Facultés universitaires Notre Dame de la paix, Namur*

**Population inconnue**
Espérance $\mu$ inconnue
Variance $\sigma^2$ inconnue
Proportion $p$ inconnue

**Echantillon**
Taille $n$
Moyenne échantillonnale $\overline{X}_n$
Variance échantillonnale $S_n^2$
Proportion empirique $\pi_n = \frac{K_n}{n}$

**Test d'une hypothèse à partir de l'échantillon**

**Bilatéral:**

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$H_1 : p = p_0 \quad H_1 : p \neq p_0$

**Unilatéral:**

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

$H_1 : p = p_0 \quad H_1 : p > p_0$

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

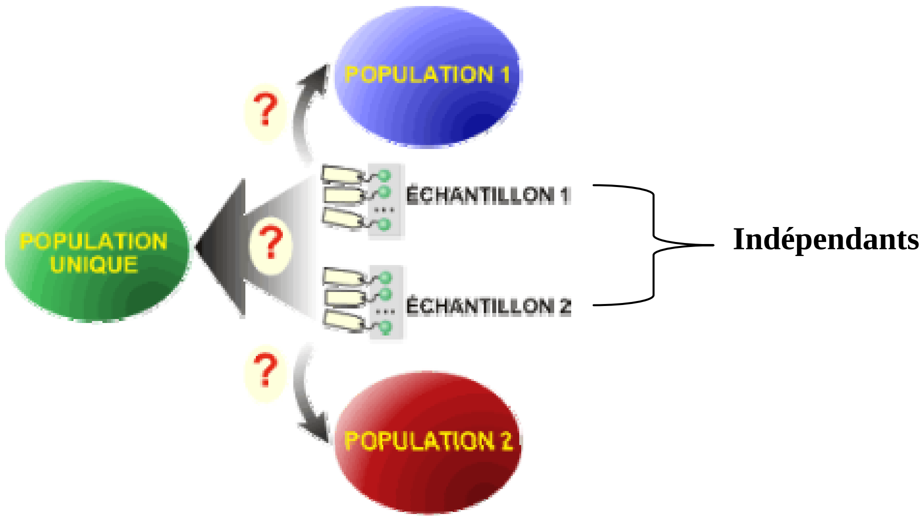
$H_1 : p = p_0 \quad H_1 : p < p_0$

**Synthèse des différentes statistiques de test pour les tests de conformité**

| Paramètre à tester | loi de la population | | statistique | loi |
|---|---|---|---|---|
| moyenne $\mu$ | Normale | $\sigma^2$ connu | $\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ | N(0 ; 1) |
| | | $\sigma^2$ inconnu | $\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)$ | Student à (n-1) degrés de liberté |
| | quelconque n > 30 | $\sigma^2$ connu | $\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ | N(0 ; 1) approximativement |
| | | $\sigma^2$ inconnu | $\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)$ | N(0 ; 1) approximativement |
| Variance $\sigma^2$ | normale | $\mu$ connu | $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2$ à n degrés de liberté |
| | | $\mu$ inconnu | $\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}\right)$ | $\chi^2$ à n-1 degrés de liberté |
| proportion p | quelconque | | $K_n$ | Binomiale $(n, p_0)$ |
| proportion p | quelconque $np_0 > 5$ $n(1-p_0) > 5$ | | $\frac{\pi_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ | N(0 ; 1) approximativement |

## TESTS D'HOMOGENEITE OU D'EGALITE

Il s'agit de déterminer si deux populations distinctes ont des paramètres identiques.




*Source : Facultés universitaires Notre Dame de la paix, Namur*

**Population inconnue**
Espérance $\mu_1$
Variance $\sigma_1^2$
Proportion $p_1$

**Population inconnue**
Espérance $\mu_2$
Variance $\sigma_2^2$
Proportion $p_2$

**Echantillon 1**
Taille $n_1$
Moyenne échantillonnale $\overline{X}_{1,n_1}$
Variance échantillonnale $S^2_{1,n_1}$

Proportion empirique $\pi_{1,n_1} = \dfrac{K_{1,n_1}}{n_1}$

**Echantillon 2**
Taille $n_2$
Moyenne échantillonnale $\overline{X}_{2,n_2}$
Variance échantillonnale $S^2_{2,n_2}$

Proportion empirique $\pi_{2,n_2} = \dfrac{K_{2,n_2}}{n_2}$

**Test d'une hypothèse à partir de l'échantillon**

**Bilatéral:**

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$H_1 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 \neq p_2$

**Unilatéral:**

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\qquad$ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\qquad$ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

$H_1 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 > p_2$ $\qquad$ $H_1 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 < p_2$

**Synthèse des différentes statistiques de test pour les tests d'homogénéité**

| Paramètres à tester | loi de la population | | statistique | loi sous l'hypothèse d'égalité des paramètres |
|---|---|---|---|---|
| moyennes $\mu_1$ et $\mu_2$ | Normale ou n1 et n2 > 30 | $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ connus | $\dfrac{\bar{X}_{1,n_1} - \bar{X}_{2,n_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | N(0 ; 1) |
| | normale | $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ inconnus mais hypothèse d'homoscédasticité vérifiée ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) | $\dfrac{\left(\bar{X}_{1,n_1} - \bar{X}_{2,n_2}\right)}{\sqrt{S_{estim}^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ avec $S_{estim}^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_{1,n_1}^2 + (n_2 - 1)S_{2,n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$ | Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ degrés de liberté |
| | quelconque n1 et n2 > 30 | $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ inconnus mais hypothèse d'homoscédasticité vérifiée ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) | $\dfrac{\left(\bar{X}_{1,n_1} - \bar{X}_{2,n_2}\right)}{\sqrt{S_{estim}^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ avec $S_{estim}^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_{1,n_1}^2 + (n_2 - 1)S_{2,n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$ | N(0,1) approximation |
| | normale ou quelconque avec n1 et n2 > 30 | $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ inconnus | $\dfrac{\bar{X}_{1,n_1} - \bar{X}_{2,n_2}}{\sqrt{\dfrac{S_{1,n_1}^2}{n_1} + \dfrac{S_{2,n_2}^2}{n_2}}}$ | N(0 ; 1) approximation |
| Variances $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ | normale | | $\dfrac{S_{1,n_1}^2}{S_{2,n_2}^2}$ | Fisher à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté |
| proportion p1 et p2 | $n_1\pi_{1,n_1}\left(1 - \pi_{1,n_1}\right) > 12$ $n_2\pi_{2,n_2}\left(1 - \pi_{2,n_2}\right) > 12$ | | $\dfrac{\pi_{1,n} - \pi_{2,n}}{\sqrt{p_{estim}\left(1 - p_{estim}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ avec $p_{estim} = \dfrac{K_{1,n} + K_{2,n}}{n_1 + n_2}$ | N(0 ; 1) approximation |